Exercice sur la fonction trinôme

Soit une fonction polynôme du second degré donnée par son expression :

$f(x) = x^2 + 2x-8$
Forme développée.

Une fonction trinôme est de la forme ax^2+bx+c avec a,b, et c trois réels et a différent de 0.

1. Donner les valeurs de a, b et c.
2. Donner le développement de $(x+1)^2$ et en déduire l'expression de x^2+2x en fonction de $(x+1)^2$.
3. Donner alors l'expression de f(x) en fonction de $(x+1)^2$. Nous obtenons la forme canonique de f(x) soit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
4. Donner les valeurs de α et de β.
5. Vérifier que $\alpha =-b/(2a)$ et que $\beta = f(\alpha)$.
6. Quelle est la valeur minimum prise par f(x) et pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?
7. Quelles sont alors les coordonnées du point sommet de la parabole ?
8. Quel est l'asymptote verticale, axe de symétrie de la parabole d'expression f(x).
9. En utilisant $(a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$ en déduire la forme factorisée de f(x) à partir de la forme canonique.
10. Quelles sont alors les deux solutions x1 et x2 de f(x) = 0
11. Retrouver $\alpha = (x1+x2)/2$
12. Tracer la fonction dans un repère orthonormé. Retrouver le point sommet et les deux racines de f.
13. Tracer un tableau de signe puis de variation de la fonction.
14. Résoudre algébriquement en utilisant la forme la plus adaptée et vérifier les résultat au graphique :

- $f(x) = -8$
- $f(x) = 0$
- $f(x) = -9$
- $f(x) > -8$

Correction :

1. a = 1, b= 2 et c= - 8
2. $(x+1)^2=x^2+2x+1$ soit $x^2+2x=(x+1)^2-1$
3. $f(x)=(x+1)^2-9$
4. $\alpha = -1$ et $\beta = -9$
5. $\frac{-b}{(2a)}=\frac{-2}{(2\times1)}=-1$ et f(- 1) = -8 soit α et β.
6.

$(x+1)^2\geq0$ car un carré est toujours positif ou nul donc $f(x)=(x+1)^2-9\geq-9$ donc la valeur minimum atteint par f est -9 et est atteinte pour x = - 1 soir lorsque $(x+1)^2=0$.

7. Le point sommet a pour coordonnées (- 1 ; - 9).
8. Axe de symétrie est : x = -1.

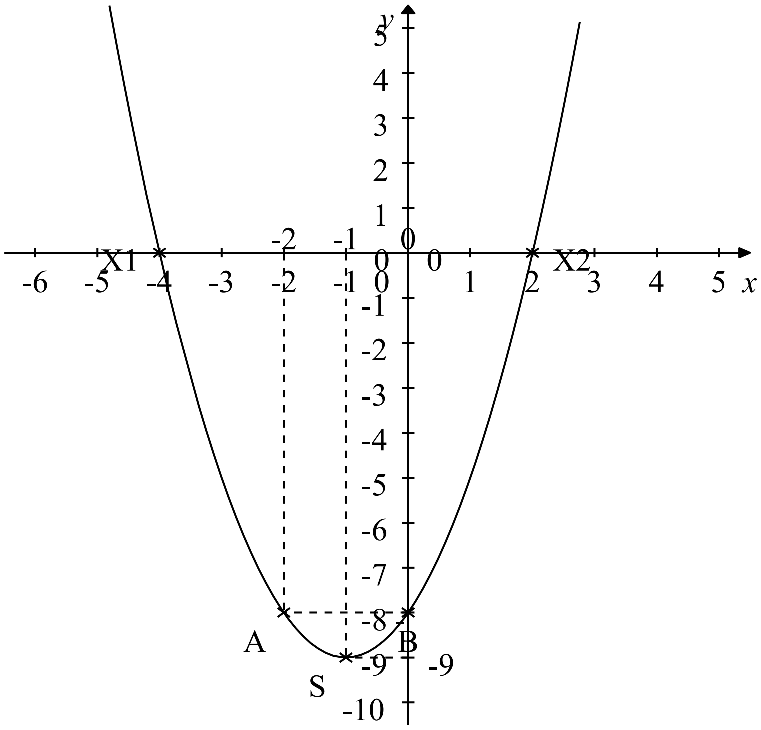
9. $f(x)=(x+1)^2-9$ or $(x+1)^2-3^2=[(x+1)-3][(x+1)+3]=(x-2)(x+4)$

$f(x)=(x-2)(x+4)$

10. x 1 = - 4 et x 2 = 2

11. (x1 + x2) / 2 = (- 4+2) /2 = - 1

12.



13.

x	$-\infty$	-4		-1		2		$+\infty$
$(x-2)$	$-$	-6⋮	$-$	-3⋮	$-$	0	$+$	
$(x+4)$	$-$	0	$+$	3⋮	$+$	6⋮	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	-9	$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	0		-9		0		

14.

- f(x) = x² + 2x-8 = 8 soit $x^2+2x=0$ soit x= 0 ou x = -2
- $f(x)=(x-2)(x+4)=0$ soit x = -4 ou x= 2
- 0

$f(x)=(x+1)^2-9=-9$ soit $(x+1)^2=0$ soit x = -1

- $f(x)=x^2+2x-8>-8$ soit $x^2+2x>0$

$+\infty$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
x^2+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit :] - ∞ ; -2 [U]0 ; + ∞ [