## Exercice 1

Soit la suite (Un) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ avec $Un > -1$ telle que :

$U_{n+1} = \sqrt{Un+1}$ et Uo = 2 ;

4. Justifier que Un est strictement supérieur à zéro quelque soit n de $\mathbb{N}$ .
5. Donner les valeurs des 4 premiers termes de la suite et conjecturer sur sa variation.

6. Soit une fonction f définie sur [1 ; 2] par l'expression :

$f(x) = \sqrt{x+1}$

Étudier les variations de le fonction f.

4. En déduire par une récurrence que $1 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 2$ .Justifier alors votre conjecture précédente concernant le sens de variation de la suite.
5. Dire alors si la suite converge en justifiant.
6. Soit une fonction g définie sur [1 ; 2] par l'expression : $g(x) = \sqrt{x+1} - x$ , après avoir donner l'expression de sa dérivée, étudier son signe et donner le tableau de variation de g sur l'intervalle considéré.
7. Prouver qu'il n'existe qu'une solution notée α telle que f(α ) -α = 0 et donner une approximation de α arrondie à $10^{-2}$ .
8. En déduire la limite de la suite Un.

## Exercice 2

Soit une suite Un définie par la relation de récurrence suivante : $U_{n+1} = \frac{1}{2} Un + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .

Avec Uo =0

1. A l'aide d'un graphique, générer les 3 premiers termes de la suites et donner les valeurs de U1, U2, U3 par le calcul algébrique.
2. Soit une suite Vn telle que $Vn = \frac{1}{2} Un - 1$ , Prouver que Vn est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Donner l'expression de Vn en fonction de n puis celle de Un en fonction de n
4. En conclure quant au sens de variation de Vn puis de Un
5. Donner la limite de Vn puis de Un et en déduire si Un et Vn convergent.

## Exercice 3

Deux bassins d'épuration noté A et B. A est en amont de B et s'écoule dans B.

- Soit Un, la quantité d'eau en m cube dans le bassin A .
- Soit Vn, la quantité d'eau en m cube dans le bassin B.

Avec n le nombre d'heures.

Le bassin A alimente le bassin B de la façon suivante :; chaque heure, il perde 25 % de son eau qui s'écoule dans B. Au départ il contient 1000 m cube.

1. Exprimer la relation de récurrence entre deux termes consécutifs de la suite Un
2. Exprimer la relation de récurrence entre deux termes consécutifs de la suite Vn

3. Exprimer Un en fonction de n et en déduire que c'est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. En déduire l'expression de Vn en fonction de n.
5. Au bout de combien de temps le volume du bassin B sera supérieur à celui de A.

## Correction :

### Exercice 1

1. On sait que :

$Un>-1$ donc $Un+1>0$ donc $\sqrt{(Un+1)}>0$ donc $U_{n+1}>0$ .

2. Uo = 2 ; $U1=\sqrt{(3)}$ , $U2=\sqrt{(\sqrt{3}+1)}$ et $U3=\sqrt{(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1)}$ , on conjecture que la suite est décroissante.
3. $f(x)=\sqrt{x+1}$ or x+1 est une fonction strictement croissante et continue sur [ 1 ; 2 ]donc $f(x)=\sqrt{x+1}$ aussi.

| $x$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | √2 | √3 |

4. Initialisation : on a Uo = 2 ; $U1=\sqrt{(3)}$ ,= donc $1\leq U_{n+1}\leq U_n\leq 2$ pour n =0

Hérédité : supposons vrai : $1\leq U_{n+1}\leq U_n\leq 2$ or $f(x)=\sqrt{x+1}$ est croissante sur [ 1 ; 2 ], donc $f(1)\leq f(U_{n+1})\leq f(U_n)\leq f(2)$ soit $1\leq U_{n+2}\leq U_{n+1}\leq 2$

Conclusion : $1\leq U_{n+1}\leq U_n\leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .

donc la suite est décroissante.

5. La suite est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.
6. $g(x)=\sqrt{x+1}-x$ donc

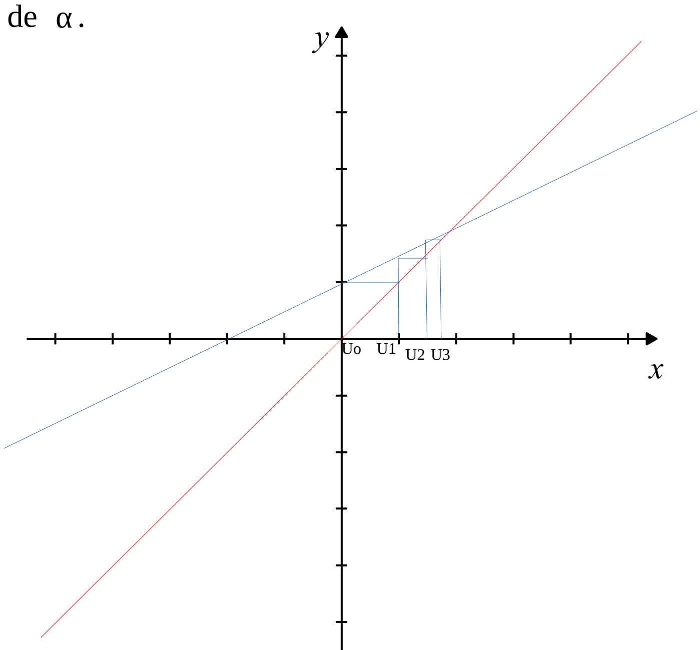
$$g'(x)=\frac{1}{(2\sqrt{x+1})}-1=\frac{(1-2\sqrt{x+1})}{(2\sqrt{x+1})}=\frac{(1-4x-4)}{(2\sqrt{x+1}+4x+4)}=\frac{(-4x-3)}{(2\sqrt{x+1}+4x+4)}<0$$

| $x$ | 1 | α | 2 |
|---|---|---|---|
| g | √2 -1 | 0 | √3 -2 |

7. g est continue et définie sur [ 1 ; 2 ] ; elle est strictement décroissante et $g(1)>0\ et\ g(2)<0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires g(x) = 0 admet une seule solution notée α telle que g( α ) = 0 avec α appartenant à[ 1 ; 2 ].

On trouve environ 1,62 pour la valeur de α.

8. Lim Un = α




### Exercice 2

$U_{n+1}=\frac{1}{2}Un+1$ et Uo =0

1. Uo= 0 ; U1 = 1 ; U2 = 1,5 et U3 = 1,75

2. $Vn=\frac{1}{2}Un-1$ donc

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}U_{n+1}-1=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}Un+1)-1=\frac{1}{4}Un+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{4}Un-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}Un-1)=\frac{1}{2}Vn$$

Vn est une suite géométrique de raison q = 0,5 et de premier terme Vo = -1.

3. $Vn=-(\frac{1}{2})^n$ et $Un=2[-(\frac{1}{2})^n+1]=\frac{(-2+2^{n+1})}{2^n}$ Vn et Un sont croissantes.
4. Vn et Un sont croissantes. La différence de deux termes consécutifs est positif :

$V_{n+1}-Vn=\frac{1}{2^{n+1}}>0$ et $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2^n}>0$

5. $\lim Un=\lim 2-\frac{1}{2^{n-1}}=2$ et $\lim Vn=0$ Un et Vn convergent car leurs limites sont des réels.

## Exercice 3

1. $U_{n+1}=0{,}75Un$
2. $V_{n+1}=0{,}25Un+Vn$
3. $U_n=0{,}75^n Uo=1000\times 0{,}75^n$ est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme 1000
4. $V_n=\sum_{i=0}^{n-1} Ui\times 0{,}25$ soit $V_n=0{,}25\sum_{i=0}^{i=n-1} Ui=0{,}25\times 1000\frac{(1-0{,}75^n)}{0{,}25}=1000(1-0{,}75^n)$
5. $1000(1-0{,}75^n)>0{,}75^n\times 1000$ soit $n>\frac{-\ln(2)}{\ln(0{,}75)}=2{,}4h$ soit n = 3 h .