Exercice n°1 :

Soit un jeu de 32 cartes. Imaginons qu'un joueur fasse une partie avec 3 amis.

1. Quel est le nombre de mains que ce joueur peut obtenir ?

2. Quelle est la probabilité que sa main contienne aucun as, un as, deux as, trois as, 4 as exactement ? Arrondir à 10^{-4} . On admettre que la probabilité d'avoir 4 as est 0,002 pour le reste de l'exercice.
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un as ?au moins deux as ?au moins 3 as dans son jeu ?On admettra que la probabilité d'avoir au moins un as est de 0,71.
4. Le joueur joue 100 parties.
   Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de parties où il possède au moins 1 as dans sa main.

   Justifier que Y suit une loi binomiale où l'on précisera ses paramètres n et p.
5. Quelle est la probabilité que sur les 100 parties, le joueur ait au moins 1 as dans sa main, exactement 60 fois.
6. Trouver le nombre de parties qu'il faut qu'il joue pour que la probabilité qu'il ait les 4 as au moins une fois soit supérieure à 75 %.

Correction :

1. Le nombre de mains possibles est : $\binom{32}{8}=10518\,300$
2. Soit X, la variable aléatoire qui compte le nombre d'as dans la main.

   P (X =0) = $\dfrac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}}\simeq 0{,}2955$

   P(X =1) = $\dfrac{\binom{4}{1}\times\binom{28}{7}}{\binom{32}{8}}\simeq 0{,}4503$

   p (X =2) = $\dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{28}{6}}{\binom{32}{8}}\simeq 0{,}2149$

   P(X =3) = $\dfrac{\binom{4}{3}\times\binom{28}{5}}{\binom{32}{8}}\simeq 0{,}0374$

   P (X= 4) = $\dfrac{\binom{4}{4}\times\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}}\simeq 0{,}0020$

3. La probabilité d'avoir au moins un as est P ($X\geqslant 1$) = 1 – P (X=0) = 1- $\dfrac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}}\simeq 0{,}7045$

La probabilité d'avoir au moins deux as est P($X\geqslant 2$) = $P(X\geq 1)-P(X=1)\simeq 0{,}2542$

La probabilité d'avoir au moins 3 as est P ($X\geqslant 3$) = $P(X\geq 2)-P(X=2)\simeq 0{,}0393$

4. Au cours de chaque partie, le joueur a soit au moins 1 as soit il n'en a aucun. Chaque jeu correspond à une expérience a deux issues, succès ou échec avec avoir au moins un as correspondant au succès. Cette expérience est répétée 100 fois et est assimilée à un tirage avec remise. Y qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètres n = 100 et p = P ($X \geqslant 1$) =0,71.
5. P (Y = 60) = $\binom{100}{60} \times 0{,}71^{60} \times 0{,}29^{40} \simeq 0{,}0051$
6. Soit Z, la variable aléatoire qui compte le nombre de jeu où la main présente les 4 as. Soit n le nombre de parties. Z suit une loi binomiale de paramètres n et p = P(X =4) = 0,002.

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}002^{0} \times 0{,}998^{n} > 0{,}75$$

$-n \ln(0{,}998) > -\ln(0{,}25)$ soit $n > \dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}998)}$ ou à la calculatrice :

Soit n = 693 parties pour avoir au moins une fois 4 as dans sa main au cours d'une partie avec une probabilité supérieure à 75 %.