Exercice n° 1 : Complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) avec unité graphique de 1 cm.
La figure sera effectuée sur ce repère au fur et à mesure de l'exercice.
1)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
$z^2 -8\sqrt{3}\, z +64 = 0$
2) On considère les points A et B d'affixes respectives :
$a = 4\sqrt{3} -4 i$
$b = 4\sqrt{3} +4 i$
a) Donner a et b sous forme exponentielle.
b) En déduire OA, OB et AB.
c) Placer alors les points A et B dans le repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) en laissant les traits de construction.
d) En déduire la nature du triangle OAB en justifiant.
3) On désigne par C le point d'affixe c = $-\sqrt{3}$ +i et D son image par la rotation de centre O et d'angle – π/3 soit que
d = $c\,e^{-i\Pi/3}$
a) Donner la forme exponentielle de c et donc de d, puis placer C et D dans le repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).
b) Donner la forme algébrique de d.
4) Soit G, tel que :
$-\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$
a) Placer le point G dans le repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).
b) Prouver que g, l'affixe de G est $g=4\sqrt{3} +6i$
d) Montrer que C, D et G sont alignés.
d) Montrer que OBGD est un parallélogramme.
5) Quelle est la nature du triangle AGC.

Exercice n° 2 : exponentielles et logarithmes

<u>Partie A</u>
Soit $g(x) = 2x^2-(x^2+1)\ln(x^2+1)$ définie sur l'intervalle [0 ; +∞[
1) Montrer que $g'(x) = 2x-2x\ln(x^2+1)$
2) Étudier le signe de g' puis le sens de variation de g sur [0 ; +∞[
3) Déterminer la limite de g en +∞ (on pourra factoriser forcé la fonction f par (x^2+1)).
4) Montrer qu'il existe une seule solution que l'on notera α, telle que g(α) =0 sur l'intervalle
$[\ \sqrt{e-1}\ ;\ \sqrt{e^2-1}\ ]$
5)Donner une approximation de α à 10^{-3} à l'aide de la calculette.
6) En déduire le signe de g sur l'intervalle [0 ; +∞[
<u>Partie B</u>
Soit f(x) définie sur l'intervalle [0 ; +∞[
avec f(x) = $\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ si $x \neq 0$ et f(x) = 0 sinon
1) Donner la valeur de la dérivée de ln (x) en x = 1 par le taux d'accroissement.
En déduire que $\lim\limits_{X \to 0} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ = 1 et en déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de f'(0).
(Aide : changement de variable $X = x^2$)
2) Montrer que f' (X) = $\dfrac{g(x)}{x^2(x+1)}$
3) A l'aide du signe de g déterminé dans la partie A, étudier le signe de f' et en déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[
4) Déterminer quelle est la valeur de x pour laquelle f admet un maximum sur [0 ; +∞[d'après la partie A.
5) Par le fait que g(α) = 0 déterminer l'expression de $\ln(\alpha^2+1)$ en fonction de α et justifier que :
$0 \leq f \leq 2\dfrac{\alpha}{(\alpha^2+1)}$
6) Soit h(x) = f(x) – $\dfrac{\ln(2x^2)}{x}$
Prouver que h(x) = $\ln\left[\dfrac{(1+x^2)}{2x^2}\right]\dfrac{1}{x}$, en déduire son signe pour $x \geqslant 1$ (on pourra étudier le signe de x^2 -1)
7) En déduire que $0 \leq f \leq \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$ puis en déduire alors la limite de f en +∞